Wykład 2
12 marca 2021
10:04

OPERATORY SPRZĘŻONE W PRZESTRZENI BANACHA

Niech $T \in B(X)$, czyli $T: X \to X$ ograniczony operator liniowy, na prz. Banacha X. $\boxed{X^* = B(X, \mathbb{F})}$ - prz. dualna

Def: Operatorem sprzężonym do $T \in B(X)$ nazywamy operator $T^* \in B(X^*)$ dany wzorem

$$T^*(l) = l \circ T, \qquad l \in X^*$$

Czyli korzystając z zapisu $\langle x, l \rangle := l(x)$

$$\forall_{\substack{x \in X \\ l \in X^*}} \quad \underline{\langle Tx, l \rangle} = l(Tx) = T^*(l)(x) = \underline{\langle x, T^*(l) \rangle}$$

STW. $T^* \in B(X^*)$ poprawnie określony oraz $\|T^*\| = \|T\|$.

Dowód:

$l \circ T: X \to \mathbb{F}$ należy do X^*, bo złożenie dwóch ograniczonych op. liniowych jest ograniczonym op. liniowym.

Ponadto,

$$\|T^*(l)\| = \|T \circ l\| \leq \|T\| \cdot \|l\|.$$

Czyli $\|T^*\| \leq \|T\| \quad (*)$

Czyli $\|T^*\| \leq \|T\|$ (*)

Żeby uzyskać nierówność w drugą stronę przypomnij, że X zanurza się w prz. podwójnie sprzężoną

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} X^{**} := (X^*)^* \quad [i(x)(\varphi) = \varphi(x)]$$

Wtedy obcięcie $T^{**} := (T^*)^* \in B(X^{**})$ do X daje op. T tzn

$$T^{**}\big|_X = T.$$

Zatem

$$\|T\| = \|T^{**}|_X\| \leq \|\underbrace{T^{**}}_{=(T^*)^*}\| \overset{(*)}{\leq} \|T^*\|. \quad \blacksquare$$

<u>Uwaga 1</u> Jeżeli $X = H$ przestrzeń Hilberta, to

$H^* \underset{\text{anty}}{\cong} H$ (Tw. Riesza)

$$\forall_{x,y} \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

gdzie $\langle \cdot | \cdot \rangle$ iloczyn skalarny na H

Uwaga 2 | Jeżeli $X = l_p(\mathbb{N})$ dla $p \geq 1$ to

Uwaga 2 Jeśli $X = L_p(\mu)$ dla $p \geq 1$ to operator sprzężony do $T \in B(L_p(\mu))$ to jedyny operator $T^*: L_q(\mu) \to L_q(\mu)$ gdzie

$$\forall_{\substack{x \in L_p(\mu) \\ y \in L_q(\mu)}} \quad \int_\Omega (Tx)\cdot y \, d\mu = \int_\Omega x\,(T^* y)\, d\mu$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (gdy $p=1$, to $q=\infty$).

Częściowy porządek w pr. L_p

Zauważmy, że pr. $L_p(\mu)$ jest uporządkowana w stożek funkcji dodatnich (nieujemnych)

$$L_p(\mu)_+ := \{x \in L_p(\mu) : x \geq 0 \ \mu\text{-p.w.}\}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} x, y \in L_p(\mu)_+ \\ \lambda \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x + y \in L_p(\mu)_+ \\ \lambda x \in L_p(\mu)_+ \end{matrix}}$$

Który zadaje częściowy porządek na $L_p(\mu)$

def:

$x \leq y \iff y - x \in L_p(\mu)_+ \iff y - x \geq 0$ μ-p.w.

Załóżmy teraz że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (przypadek rzeczywisty)

wtedy

$$\boxed{x \leq y \iff x \leq y \ \mu\text{-p.w.} \iff \mu(\{t : x(t) > y(t)\}) = 0}$$

powyższy częściowy porządek zadaje na $L_p(\mu)$ strukturę kraty z działaniami

$x \vee y := \max\{x, y\}$ („join")

$x \wedge y := \min\{x, y\}$ („meet")

$$|\max\{x,y\}|^p, \ |\min\{x,y\}|^p \leq \max\{|x|, |y|\}^p =$$

$$= \max\{|x|^p, |y|^p\} \leq |x|^p + |y|^p$$ – całkowalny jako suma całkowalnych

Zatem $x \vee y, \ x \wedge y \in L_p(\mu)$

De facto $L_p(\mu)$ jest kratą Banacha

w następującym sensie

Def: Rzeczywistą kratą Banacha nazywamy rzeczywistą przestrzeń Banacha X, która jednocześnie jest kratą oraz

(1) $\forall_{x,y,z \in X} \quad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(2) $\forall_{\substack{x \in X \\ a \geq 0}} \quad x \geq 0 \Rightarrow a \cdot x \geq 0$

(3) kładąc $|x| := x \vee (-x)$ mamy

$$\forall_{x,y \in X} \quad |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$